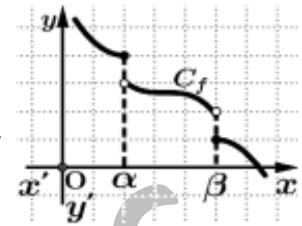


7ο Κριτήριο αξιολόγησης στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου**Διάρκεια: 1 ώρα****Ύλη έως την συνέχεια συνάρτησης****Θέμα Α**

A) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f . Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[α,β]$.



1 μονάδα

B) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ με την f να μην είναι η μηδενική συνάρτηση και να υπάρχει διάστημα στο οποίο είναι θετική. Να επιλέξετε όποια ή όποιες απαντήσεις είναι σωστές, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

i. Η f^2 είναι συνεχής στο Δ .

ii. Η $\frac{1}{f}$ είναι συνεχής στο Δ .

iii. Η $\sqrt{f}$ είναι συνεχής σε υποσύνολο του Δ .

iv. Η $|f| + f$ είναι συνεχής στο Δ και υπάρχει υποσύνολο του Δ στο οποίο να είναι ίση με την $2f$.

2 μονάδες

Θέμα Β

A) Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ x \ln \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

2 μονάδες

B) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-3, & x < -1 \\ x^3 + 2, & -1 \leq x < 1 \\ 4x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

2 μονάδα

Γ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & x < 1 \\ \beta, & x = 1 \\ \frac{\eta \mu(2x-2) - \alpha x + \alpha}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2 μονάδες

Θέμα Γ

A) Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει $\left| \sqrt{x} f(x) - \frac{\varepsilon \varphi x}{\sqrt{x}} \right| \leq x^2$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

3 μονάδες

B) Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f : \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{5x+4}f(x) = 2f(x) + \eta\mu 5x \text{ για κάθε } x \geq -\frac{4}{5}.$$

2 μονάδες

Γ) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)(x-1) \geq x^2 + 2x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, τότε να υπολογιστεί το $f(1)$.

2 μονάδες

Θέμα Δ

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- Υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$.
- Η συνάρτηση $g - f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Να αποδείξετε ότι:

A) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

2 μονάδες

B) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

2 μονάδες

Εύχομαι κάθε επιτυχία!
Νίκος Τούντας

Χρήσιμες οδηγίες:

- Η συνολική βαθμολογία είναι στις 20 μονάδες
- Διαβάστε καλά κάθε ερώτημα
- Προτεινόμενος χρόνος: Θέμα A: 10 min / Θέμα B: 20 min / Θέμα Γ: 20 min / Θέμα Δ: 10 min
Αν δεν μας βγαίνει ένα ερώτημα προχωράμε στο επόμενο, δεν αφιερώνουμε περισσότερο χρόνο.
Αν περισσέψει χρόνος επιστρέφουμε πίσω.

Λύσεις

Θέμα Α

Α) Σύμφωνα με την γραφική παράσταση:

- η f είναι συνεχής στο (α, β)
- $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \neq f(\alpha)$
- $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \neq f(\beta)$

Άρα η f δεν είναι συνεχής σε κανένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$.

Β) Σωστές είναι οι απαντήσεις i., iii. και iv.

Η f^2 συνεχής στο Δ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων άρα σωστή η i.

Η $\frac{1}{f}$ δεν ορίζεται κατ' ανάγκη σε όλο το Δ άρα δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο Δ και λάθος η ii.

Η $\sqrt{f}$ ορίζεται σε υποσύνολο του Δ (από εκφώνηση) και είναι συνεχής άρα σωστή η iii.

Η $|f| + f$ είναι συνεχής στο Δ ως άθροισμα συνεχών και αφού υπάρχει διάστημα που f θετική θα είναι σε αυτό $|f| + f = f + f = 2f$ άρα σωστή η iv.

Θέμα Β

Α) Για $x < 0$ η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Για $x > 0$ η συνάρτηση $f(x) = x \ln \frac{1}{x}$ είναι συνεχής ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0 = 0$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 1 - 1 = 0$.

Είναι $\left| x \ln \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \ln \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \ln \frac{1}{x} \leq |x|$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, άρα

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Επίσης $f(0) = e^0 - 1 = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

Β) Η f είναι συνεχής στο $(-1, 1)$ ως πολωνυμική.

Στο $x_1 = -1$ είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 + 2) = 1 = f(-1)$ και στο $x_2 = 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + 2) = 3$, $f(1) = 4 \cdot 1^2 - 1 = 3$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.

Γ) Επειδή η f είναι συνεχής, τότε θα είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \beta$ (1)

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - \alpha x + \beta) = 1 - \alpha + \beta$ (2)

Από (1) και (2) είναι $1 - \alpha + \beta = \beta \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Για $\alpha = 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(2x-2) - x + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[2 \frac{\eta\mu(2x-2)}{2x-2} - 1 \right] = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ (3) γιατί

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(2x-2)}{2x-2} \stackrel{2x-2=\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$. Από τις (1) και (3) είναι $\beta = 1$.

Θέμα Γ

Α) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

1ος τρόπος: Για κάθε $x > 0$ είναι $\left| \sqrt{x}f(x) - \frac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{x}} \right| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq \sqrt{x}f(x) - \frac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{x}} \leq x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^2 + \frac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{x}} \leq \sqrt{x}f(x) \leq x^2 + \frac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{2}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right) = 0 + 1 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right) = 0 + 1 = 1$, επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x > 0$ είναι $\left| \sqrt{x}f(x) - \frac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{x}} \right| \leq x^2 \Leftrightarrow \left| \frac{xf(x) - \varepsilon\varphi x}{\sqrt{x}} \right| \leq x^2 \Leftrightarrow \frac{|xf(x) - \varepsilon\varphi x|}{\sqrt{x}} \leq x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |xf(x) - \varepsilon\varphi x| \leq x^2 \sqrt{x} \Leftrightarrow -x^2 \sqrt{x} \leq xf(x) - \varepsilon\varphi x \leq x^2 \sqrt{x} \Leftrightarrow -x^2 \sqrt{x} + \varepsilon\varphi x \leq xf(x) \leq x^2 \sqrt{x} + \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x\sqrt{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \leq f(x) \leq x\sqrt{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x\sqrt{x}) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x\sqrt{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right) = 0 + 1 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x\sqrt{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right) = 0 + 1 = 1$, επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Β) Για κάθε $x \geq -\frac{4}{5}$ είναι:

- $\sqrt{5x+4}f(x) = 2f(x) + \eta\mu 5x \Leftrightarrow \sqrt{5x+4}f(x) - 2f(x) = \eta\mu 5x \Leftrightarrow (\sqrt{5x+4} - 2)f(x) = \eta\mu 5x$
- $\sqrt{5x+4} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5x+4} = 2 \Leftrightarrow 5x+4 = 4 \Leftrightarrow 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Για κάθε $x \in \left[-\frac{4}{5}, 0 \right) \cup (0, +\infty)$: $f(x) = \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4} - 2} = \frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4} + 2)}{(\sqrt{5x+4} - 2)(\sqrt{5x+4} + 2)} = \frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4} + 2)}{5x}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu 5x}{5x} (\sqrt{5x+4} + 2) \right) = 5 \cdot 4 = 20$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{5x} \stackrel{5x=\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \omega}{\omega} = 1$.

Επειδή η f είναι συνεχής θα είναι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 20$. Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4} - 2}, & x \neq 0 \\ 20, & x = 0 \end{cases}$.

Γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Για κάθε $x > 1$ είναι: $f(x) \geq \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) \geq x + 3$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 3) \Leftrightarrow f(1) \geq 4 \quad (1)$$

Ομοίως αν $x < 1$ είναι: $f(x) \leq \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = x + 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 3) \Leftrightarrow f(1) \leq 4$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2), προκύπτει ότι $f(1) = 4$.

Θέμα Δ

A) Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \ell \in \mathbb{R}$ και έστω $h(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$ για x κοντά στο x_0 .

Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ και για x κοντά στο 1 είναι $f(x) = (x^2 - 1)h(x) + f(1)$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x^2 - 1)h(x) + f(1)] = f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 = 1$.

2^{ος} τρόπος: (Με χρήση της παραγωγισιμότητας, αν την έχουν διδαχθεί οι μαθητές)

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right) = \ell \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$.

• Έστω ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ δεν υπάρχει, τότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \ell_2$ όπου $\ell_1 \neq \ell_2$ με $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Άρα δεν θα υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right) = \frac{\ell_1}{2}$ και

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right) = \frac{\ell_2}{2}$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$ πράγμα άτοπο.

• Έστω ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \pm\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right) = \pm\infty$ πράγμα άτοπο.

Άρα τελικά είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \ell \in \mathbb{R}$ επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ άρα και συνεχής.

B) 1^{ος} τρόπος: Επειδή οι συναρτήσεις $g - f$, f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, τότε και το άθροισμά τους $g - f + f = g$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

2^{ος} τρόπος: Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$. Επειδή η $g - f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (g - f)(x) = (g - f)(1) = g(1) - f(1)$.

Θέτουμε $(g - f)(x) = h(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = h(x) \Leftrightarrow g(x) = h(x) + f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (h(x) + f(x)) = g(1) - \cancel{f(1)} + \cancel{f(1)} = g(1)$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.